

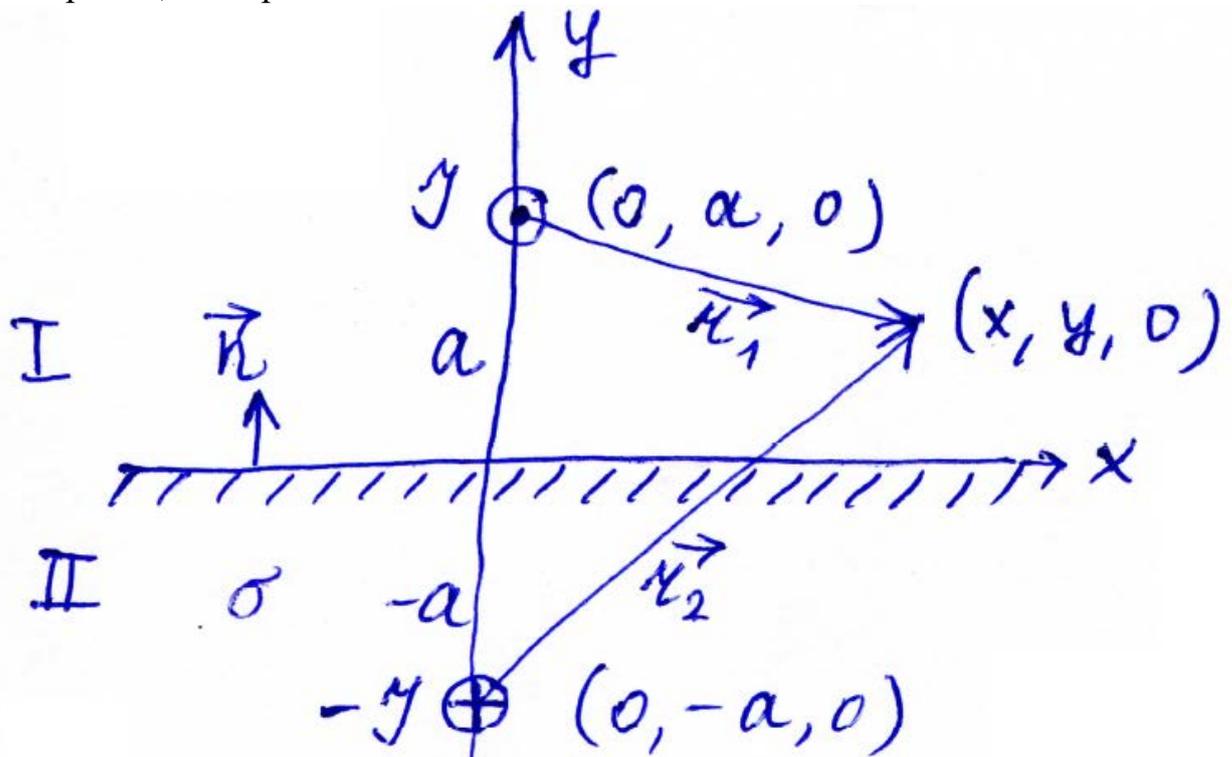
Данная серия методичек по электроду посвящается лучшему семинаристу по электроду Самому антимодному среди всех индейцев, самому индейцу среди всех теорфизиков, самому теорфизику среди всех индусов, и самому индийскому среди всех Антимод

Сразу замечание. Мы разберём задачи, посвящённые методу изображений – 28.1 и 28.3. 28.2 никакого к методу изображений не имеет, она посвящена скин-эффекту и к тому же (в отличие от задач 27-го семинара) опирается на материал с лекций. Учитывая, что на КР4 ничего подобного ей нет, я её разобрал в лекционном курсе «Последний выдох электрода», который следует читать накануне экзамена.

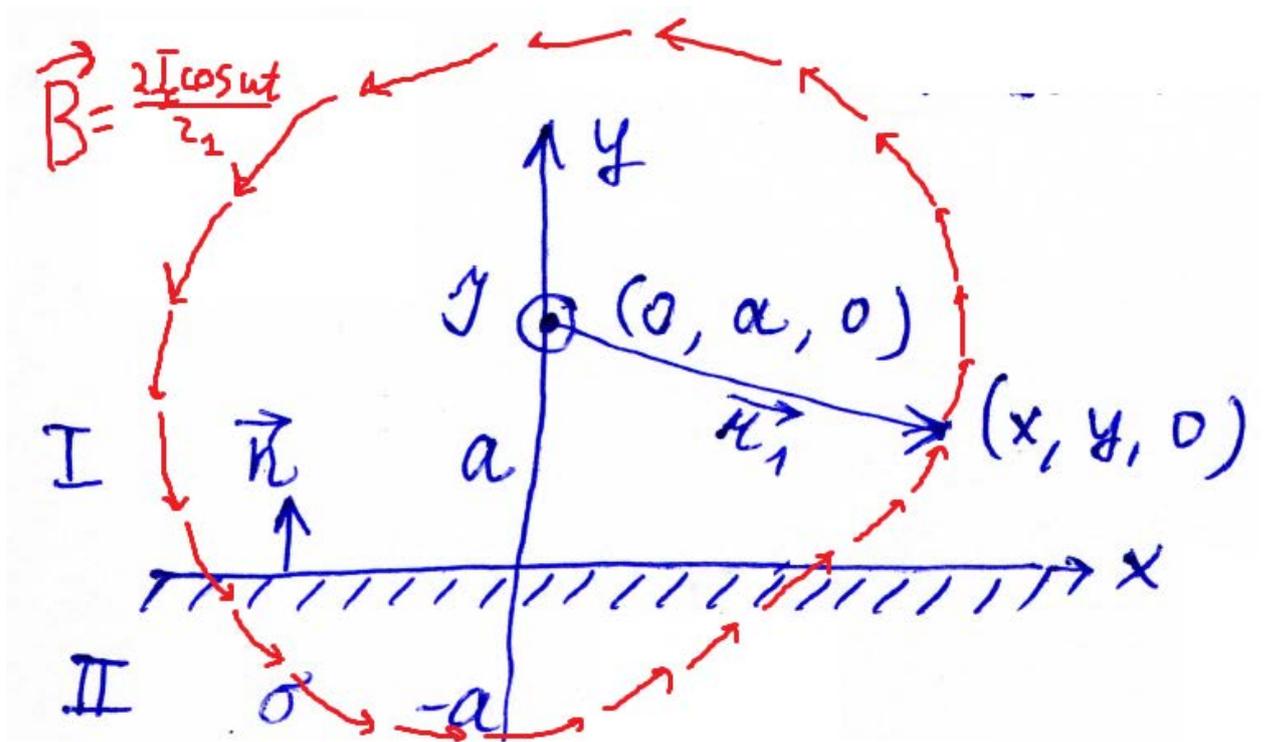
## ЗАДАЧА 28.1

28.1. Тонкий провод с током  $J_0 \cos(\omega t)$  расположен параллельно плоской поверхности идеального проводника на расстоянии  $a$  от нее. Найти поле и распределение токов на поверхности проводника.

Разберёмся, что происходит.

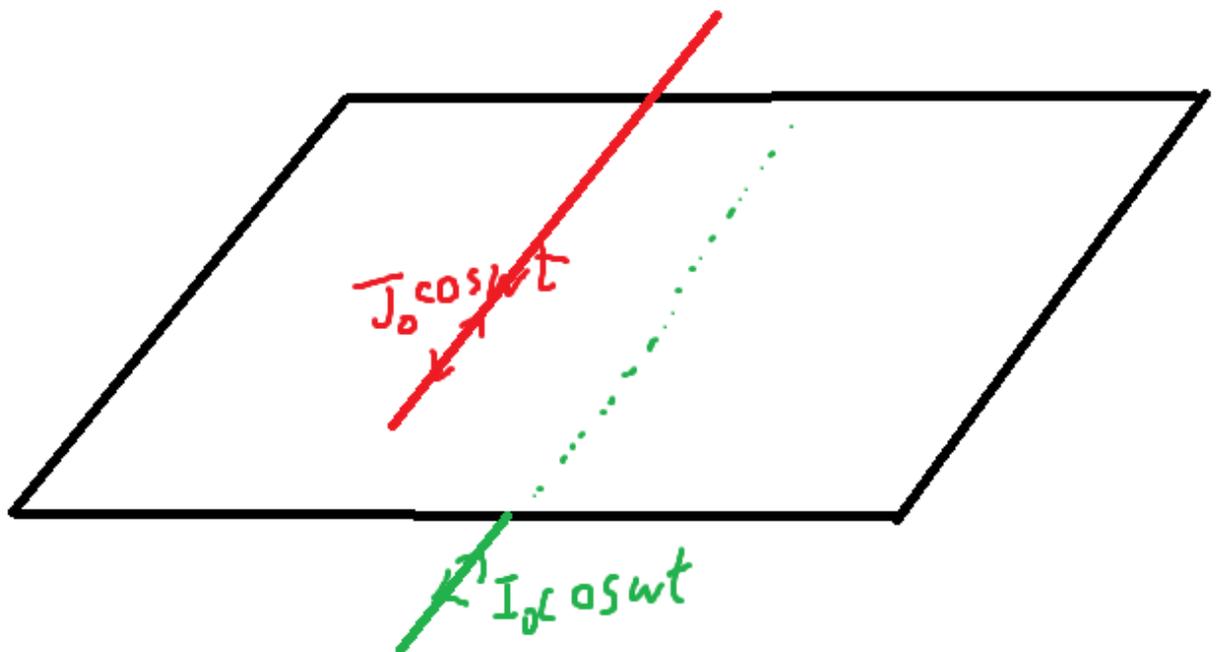


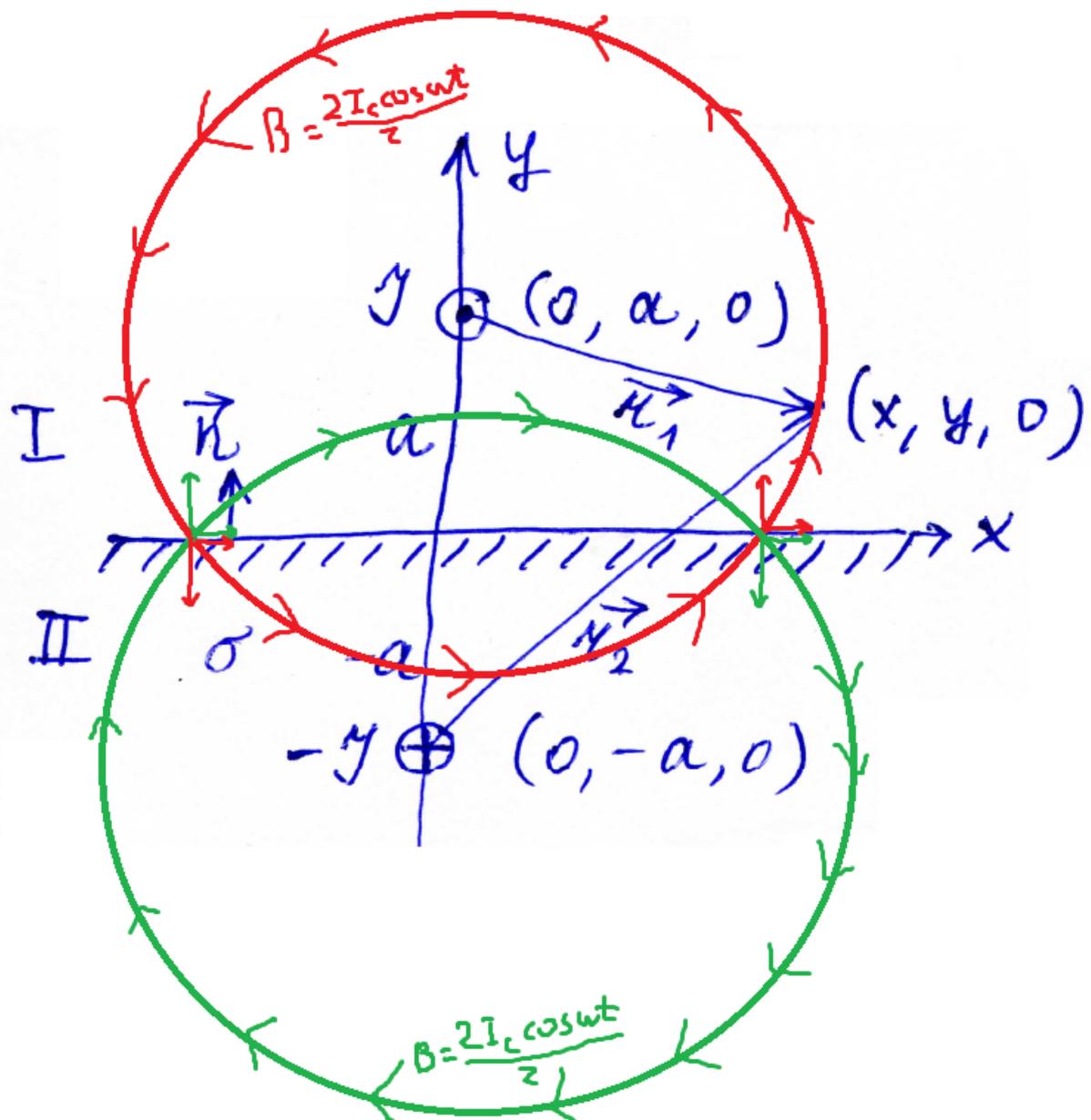
Сверху у нас течёт ток  $I \cos \omega t$ . Во всех задачах этого семинара скин-эффект сильный, т.е. магнитное поле вглубь проводника не проникает. Это означает (см. Электрод27), что нормальная составляющая  $B$  к поверхности должна быть 0. А она по умолчанию не 0:



Чтобы не таскать константу, введём нормированные токи:  $I_c = I/c$ .

Как мы видим, вектор  $\mathbf{B}$  на поверхности вполне себе имеет нормальную составляющую. Непорядок. Как её убрать? Предположить, что магнитное поле создаётся не только самим верхним током, но и его изображением.

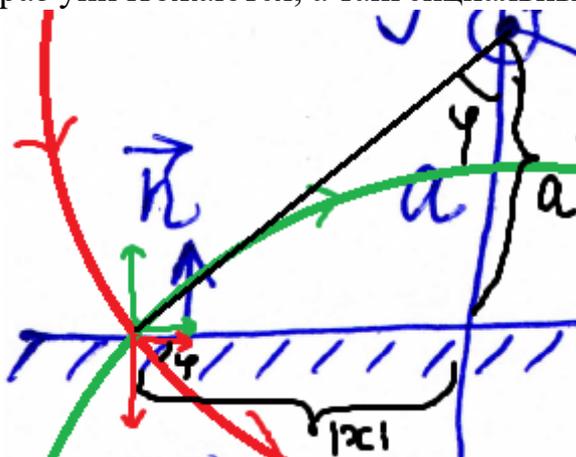




$I_c$  на рисунке есть  $I/c$ .

Тогда  $\mathbf{B}$  в каждой точке  $(x, y, 0)$  будет складываться как сумма  $\mathbf{B}$  от двух токов: один на расстоянии  $r_1$ , другой – на расстоянии  $r_2$ .

А на поверхности будет то, что нам нужно: нормальные составляющие  $\mathbf{B}$  как раз уничтожаются, а тангенциальные складываются. Вычислим их:



Каждая из проекций будет

$$B(x) = \frac{2I_c}{r} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$  - косинус угла проекции

Но они суммируются и в сумме дадут поле на поверхности

$$B(x) = \frac{4I_c}{r} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Хорошо, мы нашли магнитное поле на поверхности, но нам нужны **токи** на поверхности. Как, зная поле, найти токи?

А была такая формула на лекциях давно-давно, в теме «Граничные условия»:

$$\vec{H}_\tau^{II} - \vec{H}_\tau^I|_\Gamma = \frac{4\pi}{c} (\vec{i}_{\text{пов}}, \vec{\nu})$$

$\vec{\nu}$  – вектор на поверхности, коллинеарный **H**.

В ней опять  $c$  в качестве множителя. Давайте перезапишем, используя нормированную на  $c$  плотность тока (в начале Электрода26 я рассказывал, почему это хорошо):

$$\vec{H}_\tau^{II} - \vec{H}_\tau^I|_\Gamma = 4\pi \left( \frac{\vec{j}_{\text{пов}}}{c}, \vec{e}_{\text{пов}H} \right)$$

Вот ею мы сейчас и воспользуемся, благо что **H** совпадает с **B**:

$$\vec{B}_\tau^{II} - \vec{B}_\tau^I|_\Gamma = 4\pi \left( \frac{\vec{j}_{\text{пов}}}{c}, \vec{e}_{\text{пов}B} \right)$$

Заметим, что одна из **H**шек (которая внутри проводника) равна нулю в силу скин-эффекта – магнитное поле вовнутрь не проникает! Поэтому

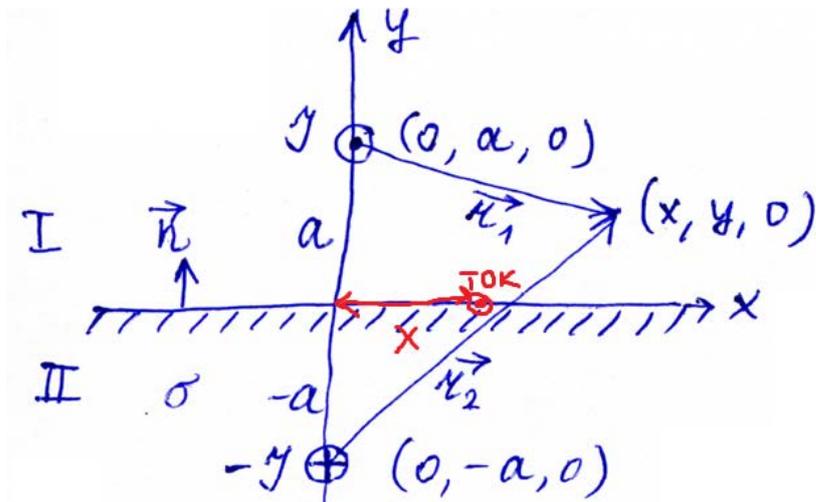
$$\begin{aligned} \vec{B}_\tau^{II}|_\Gamma &= 0; \\ -\vec{B}_\tau^I &= -\frac{4I_c}{r} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 4\pi \frac{j_{\text{пов}}(x)}{c} \end{aligned}$$

$$\vec{i}_{\text{пов}} = -\frac{a \vec{j}}{\pi(x^2+a^2)}$$

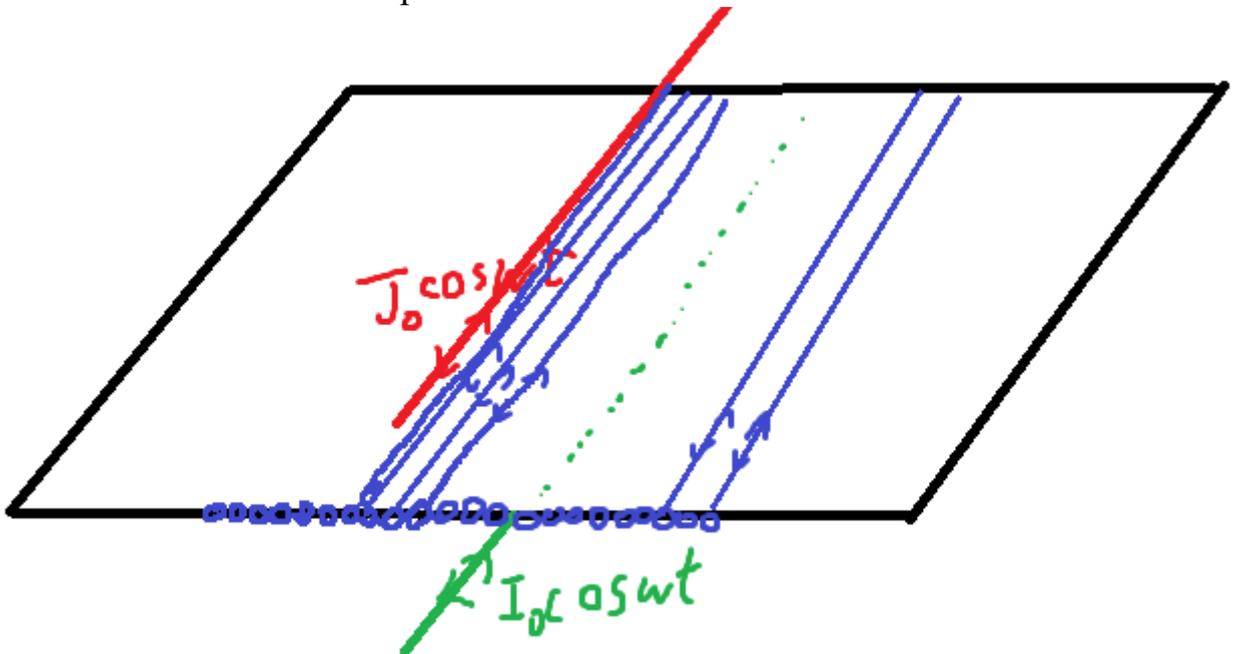
⇒

На всякий случай напомним, что он по-прежнему переменный:  $\vec{J} = J_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ . Синусоидальность мы использовали, когда занулили нормальную компоненты, сославшись на скин-эффект, который возникает как раз для синусоидальных полей.

Это будет ток, протекающий по поверхности на расстоянии  $x$  от оси симметрии:



И такие токи по всей поверхности:



Вот они, я их обозначил синими. Они всей поверхности! А по величине они

равны  $\vec{i}_{\text{нов}} = -\frac{a}{\pi(x^2+a^2)} \vec{J}$ , т.е. чем дальше они от источников (красного и зелёного токов), тем больше  $x$ , тем больше знаменатель и тем меньше сами токи.

Чтобы найти полный поверхностный ток, нужно проинтегрировать по оси абсцисс:

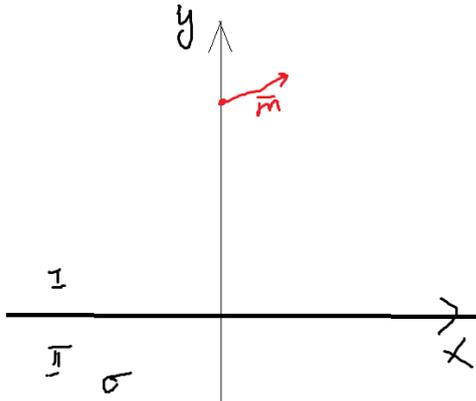
$$\int \vec{i}_{\text{нов}} dx = -\frac{a}{\pi} J_0 \cos \omega t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{e}_z dx}{x^2+a^2} = -\frac{a J_0 \cos \omega t \vec{e}_z}{\pi} \left. \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{J_0 \cos \omega t \vec{e}_z}{\pi} = -\vec{J}$$

### ЗАДАЧА 28.3

28.3\*. На большом расстоянии  $a$  от плоской поверхности идеального проводника расположен круговой контур радиуса  $r$ , по которому протекает переменный ток  $J_0 \cos(\omega t)$ . Найти распределение токов на поверхности проводника.

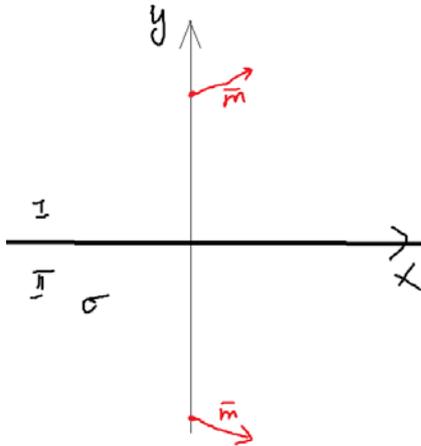
Задачи нет ни в Соколове, ни в Чугрееве, решил сам => с ответом не сверить.

Очень похожа на 28.1. Только вместо тока у нас будет магнитный момент от маленького контура:



Давайте поймём, какое будет изображение. Очевидно, тоже колечко с током, создающее момент  $\mathbf{m}$ . Надо только понять, куда оно будет направлено.

Очевидно, что если сделать так, как на рисунке ниже



То картинка будет симметрична относительно оси абсцисс и нормальной составляющей  $\mathbf{B}$  на поверхности не будет, чего нам и надо.

А как будем искать поле? Надо вспомнить формулу магнитного поля от магнитного диполя. Вот она:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r} - m r^2}{r^5}$$

Давайте, чтобы не запускаться, запишем в проекциях. Т.к. мы ищем поле на поверхности, то  $\mathbf{r} = (x, -a, z) \Rightarrow \mathbf{m}\mathbf{r} = m_x x - m_y a$  ( $m_z = 0$ ). Считаем поле от одного магнитного диполя:

$$B_{x1} = \frac{3(m_x * x - m_y a)x - m x^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$B_{z1} = \frac{3(m_x * x - m_y a)z - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}, \quad B_{y1} \text{ аналогично}$$

$$\frac{3(m_x * x - m_y a)(-a) - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}},$$

Теперь давайте учтём не только верхний реальный магнитный диполь, но и его изображение. У него магнитный момент будет уже не  $(m_x, m_y, m_z)$ , как у первого, а  $(m_x, -m_y, m_z)$ . Но и радиус-вектор будет не  $(x, -a, z)$ , а  $(x, a, z)$ . Вновь  $m\mathbf{r} = m_x x - m_y a$ .

От второго источника:

$$B_{x2} = \frac{3(m_x * x - m_y a)x - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$B_{z2} = \frac{3(m_x * x - m_y a)z - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}, \quad B_{y2} = \frac{3(m_x * x - m_y a)a - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}},$$

Видно, что  $B_{x1} = B_{x2}$ ,  $B_{z1} = B_{z2}$ , но при этом  $B_{y1} + B_{y2} = 0$  (как и должно быть).

Поэтому итоговое поле имеет две ненулевых проекции:

$$B_x = 2 \frac{3(m_x * x - m_y a)x - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$B_z = 2 \frac{3(m_x * x - m_y a)z - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Напомню, что такое внимание к оси  $z$  связано с тем, что в 28.3 она имеет значение. В 28.1 провод с током простирался вдоль всей оси  $z$ , а в 28.3 у нас точечный магнитный монополюль, что и внесло свои коррективы.

Ну всё, ура, победа, применяем  $H_{\tau}'' - H_{\tau}'|_{\Gamma} = 4\pi \left(\frac{j_{\text{пов}}}{c}, \mathbf{e}_{\text{пов}H}\right)$ : (опять нормируем плотность тока на  $c$ ):

$$2 \frac{3(m_x * x - m_y a)x - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}} = 4\pi i_{\text{спов}x}(x, z)$$

$$2 \frac{3(m_x * x - m_y a)z - mx^2}{(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}} = 4\pi i_{\text{спов}z}(x, z)$$

$$i_{\text{спов}x}(x, z) = \frac{3(m_x * x - m_y a)x - mx^2}{2\pi(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$i_{\text{спов}z}(x, z) = \frac{3(m_x x - m_y a)z - mx^2}{2\pi(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

Перейдём от нормированной плотности тока к ненормированной:

$$i_{\text{повх}}(x) = \frac{i_{c\text{повх}}(x)}{c} = \frac{3(m_x x - m_y a) - mx}{2\pi c(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$i_{\text{повх}}(x) = \frac{i_{c\text{повх}}(x)}{c} = \frac{3(m_x x - m_y a)z - mx^2}{2\pi c(x^2 + a^2 + z^2)^{5/2}}$$

Всё, распределение токов на поверхности найдено ☺ Суммарный ток считать не будем.

***Резюме:***

Изображение нужно выбрать так, чтобы занулилась нормальная компонента **В**. Тангенциальная же «подстраивается» под нужды нормальной – вычислить тангенциальную. Зная тангенциальную, найти поверхностные токи.